PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES **Durée : 4 heures**

Introduction

On désigne par E un espace euclidien réel et $\langle\ \rangle$ son produit scalaire ; la sphère euclidienne unité $\mathbb{S}_E$ de l'espace euclidien E est par définition le sous-ensemble de E :

$$\mathbb{S}_E = \{x \in E, \quad \|x\| = 1\}, \qquad \|\ \| \text{ étant la norme euclidienne sur } E.$$

Un champ de vecteurs *continu* sur $\mathbb{S}_E$ est une application continue $\chi : \mathbb{S}_E \to E$ telle que $\langle \chi(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}_E$; un des nombreux problèmes relatifs aux champs de vecteurs sur les sphères consiste à trouver k champs de vecteurs continus $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$, avec k maximum, tels qu'en *tout point* x de $\mathbb{S}_E$, la famille $\{\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_k(x)\}$ constitue une famille *orthonormale* de vecteurs. Le problème a été résolu en 1961 par le mathématicien J.F. Adams : si $n = \dim E$, il existe α_n tels champs de vecteurs sur $\mathbb{S}_E$, où :

$$\alpha_n = 8d + 2^c - 1,$$

les entiers c et d étant définis par l'écriture $n = m.2^c.16^d$, avec m entier impair et $0 \leq c < 4$; de plus, et c'est là toute la difficulté, ce nombre α_n est maximum. Le but de l'épreuve consiste à prouver la partie "aisée" du théorème[1], i.e. à construire une famille orthonormale de α_n champs de vecteurs sur $\mathbb{S}_E$, chaque champ de vecteurs étant obtenu comme la restriction à $\mathbb{S}_E$ d'un endomorphisme orthogonal de E.

La notation $\mathrm{End}(E)$, ou $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E : si U, V sont deux parties de $\mathrm{End}(E)$, on dit que U et V *commutent* si tout endomorphisme de U commute avec tout endomorphisme de V. Si $u, v \in \mathrm{End}(E)$, on note uv leur composé (au lieu de $u \circ v$) et en particulier u^2 pour $u \circ u$; on note u^* l'endomorphisme adjoint de u (relativement au produit scalaire).

Partie I : Systèmes spécifiques d'endomorphismes orthogonaux

1. Si u est un endomorphisme de E, montrer l'équivalence entre $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$ et $u + u^* = 0$. En déduire que pour 2 endomorphismes u, v, on a $\langle u(x), v(x)\rangle = 0$ pour tout $x \in E$ si et seulement si $u^*v + v^*u = 0$.

2. Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ une famille de k endomorphismes de E ; montrer l'équivalence entre les conditions :

$$(i) \quad [\ \|x\| = 1 \Rightarrow \|a_i(x)\| = 1\ ], \qquad \langle a_i(x), x\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle a_i(x), a_j(x)\rangle = 0, \quad \forall x \in E, \quad \forall i\ \forall j\ i \neq j,$$

et les conditions :

$$(ii) \qquad a_i \text{ est orthogonal}, \qquad a_i^2 = -\mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad a_i a_j + a_j a_i = 0, \quad \forall i\ \forall j\ i \neq j$$

(Id_E désigne l'application identique de E).

Dans la suite, on dit qu'une famille $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'endomorphismes d'un espace euclidien E est de type A_k si les conditions suivantes sont satisfaites :

type A_k : $\qquad a_i$ est orthogonal, $\qquad a_i^2 = -\mathrm{Id}_E$, $\qquad a_i a_j + a_j a_i = 0, \quad \forall i\ \forall j\ i \neq j.$

De même, une famille $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ d'endomorphismes de E est dite de type B_k si les relations suivantes sont vérifiées :

type B_k : $\qquad b_i$ est orthogonal, $\qquad b_i^2 = \mathrm{Id}_E$, $\qquad b_i b_j + b_j b_i = 0, \quad \forall i\ \forall j\ i \neq j.$

3. Exhiber un système de type A_1 sur $\mathbb{R}^2$ et plus généralement sur $\mathbb{R}^{2n}$; existe-t-il un système de type A_1 sur $\mathbb{R}^{2n+1}$?

4. Existe-t-il sur $\mathbb{R}^n$ un système de type A_m avec $m \geq n$?

[1] Ce résultat, qu'on peut considérer comme un résultat "d'algèbre linéaire", est attribué au mathématicien allemand A. Hurwitz (1859-1919) et au mathématicien autrichien J. Radon (1887-1956).

Tournez la page S.V.P.

Partie II : Systèmes de type A_2, A_3 sur $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble $\mathbb{H} \subset \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices h à coefficients complexes de la forme :

$$h = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}, \qquad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},$$

et on définit 4 éléments de $\mathbb{H}$: $e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ dont $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ est une base (comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) : on dit que $\mathbb{H}$ est **l'algèbre des quaternions**. Calculer les produits $e_i e_j$.

2. Pour $h \in \mathbb{H}$ de la forme ci-dessus, on pose : $\overline{h} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}$.

Que peut-on dire de l'application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ qui à h associe $\overline{h}$? Calculer $h\overline{h}$ et en déduire que si $h \neq 0$, alors h est inversible *dans* $\mathbb{H}$.

3. On définit deux applications G (pour gauche), D (pour droite) de $\mathbb{H}$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ de la manière suivante :

$$G(h) : u \in \mathbb{H} \mapsto hu \in \mathbb{H}, \qquad D(h) : u \in \mathbb{H} \mapsto u\overline{h} \in \mathbb{H}.$$

Exprimer $G(hk)$ en fonction de $G(h)$ et $G(k)$; question analogue pour D. Comparer $G(h)D(k)$ et $D(k)G(h)$.

4. En déduire deux systèmes de type A_3 sur $\mathbb{R}^4$ *qui commutent entre eux* : on demande *d'expliciter* ces deux systèmes ; en particulier, il existe sur $\mathbb{R}^4$ deux systèmes de type A_2 qui *commutent* entre eux.

5. On suppose qu'il existe un système $\{a_1, a_2\}$ de type A_2 sur E ; on note :

$$H = \mathbb{R}\mathrm{Id}_E + \mathbb{R}a_1 + \mathbb{R}a_2 + \mathbb{R}a_1a_2 \subset \mathrm{End}(E) \qquad \text{et pour } x \in E \qquad H_x = \{h(x),\ h \in H\}.$$

a. Quelle est la dimension de H_x pour $x \neq 0$?

b. En déduire que la dimension de E est divisible par 4.

Partie III : Générations de systèmes A_k et B_k

1. Soient, sur E, un système $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de type A_k et $\{b_1, b_2\}$ un système de type B_2 qui *commutent* entre eux. On pose $b = b_1b_2$; énoncer et démontrer une propriété de la famille suivante :

$$\{b_1,\ b_2,\ a_1b,\ a_2b,\ \ldots,\ a_kb\}$$

Le résultat démontré possède-t-il une réciproque ?

2. Montrer un résultat analogue au précédent en partant d'un système de type B_k et d'un système de type A_2 qui *commutent*.

3. Montrer que, sur E, l'existence d'un système de type A_6 équivaut à l'existence de trois systèmes qui *commutent* 2 à 2 :

$$\{a_1, a_2\}, \qquad \{a_3, a_4\}, \qquad \{b_1, b_2\},$$

les deux premiers étant de type A_2, le troisième de type B_2 ; on demande d'expliciter à partir de ces trois systèmes un système de type A_6.

4. En déduire que, sur E, l'existence d'un système de type B_k et d'un système de type A_6 qui *commutent* entraîne l'existence d'un système de type A_{k+6}.

Partie IV : Constructions $(E, A_k) \to (E^2, B_{k+2})$, $(E, B_k) \to (E^8, A_{k+6})$, $(E, A_k) \to (E^{16}, A_{k+8})$

Dans cette partie, l'espace E^q désigne l'espace euclidien E^q muni de sa structure euclidienne "produit" des structures euclidiennes de chacun des facteurs E, c'est-à-dire :

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_q), (y_1, y_2, \ldots, y_q) \rangle = \sum_{i=1}^{q} \langle x_i, y_i \rangle.$$

1. A chaque endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$, on associe un endomorphisme $\tilde{u} \in \mathrm{End}(E^q)$ défini par :

$$\tilde{u}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_q) = (u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_i), \ldots u(x_q)), \qquad x_i \in E.$$

Démontrer des propriétés (utiles au problème) de l'application définie sur l'algèbre $\mathrm{End}(E)$, à valeurs dans l'algèbre $\mathrm{End}(E^q)$, qui à u associe $\tilde{u}$.

A SUIVRE

2. A chaque endomorphisme $v \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^q)$, on associe un endomorphisme $\hat{v} \in \mathrm{End}(E^q)$ défini de la manière suivante :

$$\hat{v}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_q) = (\sum_{j=1}^{q} v_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{q} v_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} v_{ij}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} v_{qj}x_j), \qquad x_i \in E,$$

$(v_{ij})_{1\leq i,j\leq q}$ désignant la matrice de v dans *la base canonique* de $\mathbb{R}^q$. Quelles sont les propriétés de l'application définie sur l'algèbre $\mathrm{End}(\mathbb{R}^q)$, à valeurs dans l'algèbre $\mathrm{End}(E^q)$, qui à v associe $\hat{v}$? Si v est orthogonal, que peut-on dire de $\hat{v}$? Vérifier que, pour $u \in \mathrm{End}(E)$, $v \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^q)$, les endomorphismes $\tilde{u}$ et $\hat{v}$ commutent.

3. Exhiber deux endomorphismes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ formant un système de type B_2.

4. En déduire la construction, à partir d'un système $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de type A_k sur E, d'un système de type B_{k+2} sur E^2.

5. A l'aide des deux systèmes de type A_2 sur $\mathbb{R}^4$ qui *commutent* entre eux (cf. question **II.4.**), construire un système de type A_6 sur $\mathbb{R}^8$.

6. En déduire la construction, à partir d'un système $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ de type B_k sur E, d'un système de type A_{k+6} sur E^8.

7. Montrer que l'existence d'un système $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de type A_k sur E entraîne celle d'un système de type A_{k+8} sur E^{16}.

Partie V : La preuve du théorème

1. Construire sur E, à partir d'un système $\{a_1, a_2\}$ de type A_2, un système de type A_3 : on pourra s'inspirer de l'algèbre des quaternions ; réaliser une construction analogue à partir d'un système de type A_6 sur E pour produire (sur E) un système de type A_7.

2. En déduire qu'il existe un système de type A_i sur $\mathbb{R}^{n_i}$ pour les couples $(A_i, \mathbb{R}^{n_i})$ indiqués par le tableau suivant :

A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
$\mathbb{R}^{n_i}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^{16}$

3. Soient deux entiers c, d avec $0 \leq c < 4$; déduire de la question précédente et de la partie **IV** qu'il existe sur l'espace $\mathbb{R}^{2^c.16^d}$, et à fortiori sur l'espace $\mathbb{R}^{m.2^c.16^d}$ pour n'importe quel entier $m \geq 1$, un système de type A_{8d+2^c-1}.

Partie VI : Suppression de la condition d'orthogonalité

La notation E désigne toujours un espace euclidien et $(\ )$ son produit scalaire.

1. Soit G un sous-groupe *fini* du groupe des automorphismes *linéaires* de E (on ne suppose pas que $g \in G$ est orthogonal pour le produit scalaire $(\ )$) ; en "réalisant une moyenne" sur G, montrer qu'il existe un produit scalaire sur E, que l'on note $\langle\langle\ \rangle\rangle$, tel que G soit constitué d'automorphismes orthogonaux *pour ce produit scalaire* $\langle\langle\ \rangle\rangle$.

2. En déduire l'existence d'un isomorphisme linéaire φ de E sur E tel que, pour tout $g \in G$, $\varphi g \varphi^{-1}$ soit orthogonal *pour le produit scalaire initial* $(\ )$.

3. On suppose qu'il existe sur E une famille $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'endomorphismes vérifiant les conditions :

$$a_i^2 = -\mathrm{Id}_E, \qquad a_i a_j + a_j a_i = 0, \quad \forall i\ \forall j\ i \neq j.$$

Montrer qu'il existe sur E un système de type A_k.

En conclusion, la partie "aisée" du théorème ainsi démontré est donc plus un résultat "d'algèbre linéaire" que "d'algèbre euclidienne". Le théorème difficile d'Adams, qui affirme qu'on ne peut pas trouver plus de $8d+2^c-1$ champs orthonormaux sur la sphère de $\mathbb{R}^{2^c.16^d}$, relève d'un autre domaine, complètement différent : la "Topologie Algébrique".

FIN